Математическое моделирование термопластического состояния толстостенной сферической оболочки

Д. И. Соломатин, email: solomatin.cs.vsu.ru@gmail.com
А. А. Верлин, email: alexandrverlin@mail.ru

Воронежский государственный университет

Аннотация. *Определяется напряженное и деформированное состояние толстостенной сферической оболочки, испытывающей центрально симметричные распределенные силовые, кинематические и тепловые внешние воздействия. Принимается, что материал оболочки проявляет свойства теплопроводности, упругости и пластичности. Функции пластичности зависит от трех независимых инвариантов тензора напряжений. Построен алгоритм решения задачи для любого условия пластичности. Дано графическое представление решения.*

Ключевые слова: *полый шар, толстостенная сферическая оболочка, теромоупругопластическое состояние, эквивалентное напряжение, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф напряжений.*

Введение

Решение задачи о толстостенной сферической оболочке, испытывающей разные внешние воздействия приводится во многих книгах по теории упругости, пластичности, термоупругопластичности и научных статьях, например, [1-7]. Обычно рассматривается случай, когда процесс нагружения является простым [8-15]. Решение этой и аналогичных задач представляет интерес, поскольку можно получить аналитическое, или частично аналитическое решение для разных математических моделей.

Если рассматривать постановку задачи в информационном плане, то можно выделять исходные данные. К ним относятся внешние параметры, характеризующие внешние воздействия на рассматриваемый объект, геометрические параметры объекта и материальные константы (модули), входящие в определяющие уравнения математической модели, которые устанавливают зависимость между внутренними параметрами состояния объекта. Поскольку искомые параметры состояния являются функциями внешних параметров и модулей, то представление предельных условий в виде функций внешних параметров и модулей позволяет сформулировать задачу определения допустимых значений внешних параметров состояния, для которых нужно использовать ту или иную математическую модель для определения значений искомых параметров состояния.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о толстостенной сферической оболочке (полом шаре), испытывающей полярно симметричные внешние воздействия: давление p_b на внешнюю стенку $\rho = b$ и давление p_a на внутреннюю стенку $\rho = a$. Если на границы $\rho = a$ и $\rho = b$ действует кинематические воздействия тогда задаются перемещения на этих границах u_a и u_b соответственно. Также рассматривается тепловое воздействие на шар: на границе $\rho = a$ поддерживается температура T_a, на границе $\rho = b$ – температура T_b. Предполагается, что шар проявляет упругие и пластические свойства. Искомыми параметрами состояния в каждой точки шара являются компоненты тензора напряжений, компоненты тензоров деформаций и вектора перемещений.

Детали выбираемых математических моделей рассматриваются ниже по тексту.

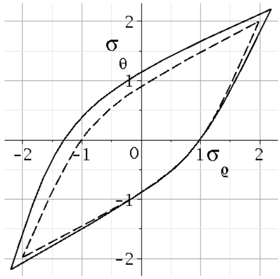
2. Основные соотношения

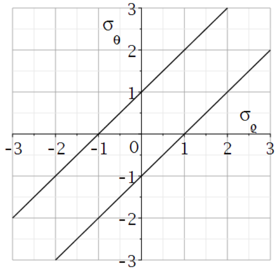
Все нижеприводимые соотношения будем записывать в безразмерном виде. В качестве масштаба длины выбирается внешний радиус шара b. Все величины имеющие размерность напряжений отнесены к пределу пластичности на одноосное растяжение k. В области упругого состояния упругие деформации являются полными (нет остаточных деформаций). Масштабная единица для температуры 1°.

Рассмотрим условие пластичности:

$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \frac{\varsigma(\sigma_\rho^w + 2\sigma_\theta^w)^{\frac{1}{w}} + \eta((|\sigma_\rho - \sigma_\theta|^{\mathrm{m}} + \alpha(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^m)^{\frac{1}{m}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} = k(T) \quad (1)$$

На рис. 1 в плоскости σ_ρ, σ_θ показаны кривые пластичности, определяемые по формуле (2) для разных значений числовых коэффициентов в функции пластичности.





а б

а) $\varsigma = 0.2,\ w = 2,\ \eta = 0.5,\ m = 3,\ k = 1$

($\alpha = 0.5$ *– сплошная линия,* $\alpha = 0$ *– пунктирная),*

б) $\alpha = 0,\ \varsigma = 0,\ k = 1$

Рис. 1. Кривые пластичности

Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что при учете первого инварианта тензора напряжений радиальное и окружное напряжения, когда точка шара находится в упругом состоянии может изменяться в ограниченном диапазоне.

Когда учитывается зависимость предела пластичности от температуры, вид кривых пластичности в плоскости $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ зависит от радиальной координаты точки шара, находящейся в пластическом состоянии.

Если значения параметров состояния $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ определяют точку области, ограниченную кривой пластичности, принимается, что определяющими уравнениями, связывающим напряжения и деформации, является соотношения закон Дюамея-Неймана [1, 7]:

$$E\varepsilon_\theta = (1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho + E\alpha T\ , \quad E\varepsilon_\rho = \sigma_\rho - 2\nu\sigma_\theta + E\alpha T \tag{2}$$

Модули E и ν – модуль Юнга и коэффициентом Пуассона соответственно считаются константами.

Если параметры состояния σ_ρ , σ_θ определяют точки на кривой пластичности, то принимается аддитивное представление полных деформаций через обратимые и необратимые деформации:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p\ , \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p \tag{3}$$

Полные деформации определяются через перемещения по формулам:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} \tag{4}$$

Полные деформации связаны условием совместности деформаций:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0 \tag{5}$$

Приращения необратимые деформации связаны с напряжениями нормальным законом, поэтому:

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial f / \partial\sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial f / \partial\sigma_\rho} \tag{6}$$

Соотношения (6) при выборе нелинейных функций (2) в общем случае неинтегрируемые [16]. Поэтому в дальнейшем для получения определяющих уравнений вместо (6) будем использовать нормальный закон пластического деформирования [14, 15]:

$$\frac{\varepsilon_\theta^p}{\partial f / \partial\sigma_\theta} = \frac{\varepsilon_\rho^p}{\partial f / \partial\sigma_\rho} \tag{7}$$

В квазистатическом приближении напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0 \tag{8}$$

3. Поле температур

Поле температур в шаре находится из решения краевой задачи [1]:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d^2T}{d\rho^2} + 2\dfrac{dT}{d\rho} = 0, \\ T\,|_{\rho=a} = T_a,\ T\,|_{\rho=b} = T_b \end{cases} \tag{9}$$

Решение задачи (9) представим в виде:

$$T = T_b + \frac{a\Delta T}{(b-a)}\left(\frac{b}{\rho} - 1\right), \quad \Delta T = T_a - T_b \tag{10}$$

4. Упругая область

Из системы уравнений (8) соотношения (2), (5), исключая σ_θ, ε_θ, ε_ρ получаем уравнение для радиальной компоненты тензора напряжений:

$$\frac{d}{d\rho}(3\sigma_r + r\frac{d}{d\rho}\sigma_r) - \frac{2abE\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b-a)\rho^2} = 0 \qquad (11)$$

Решая уравнение (11) и учитывая (10), находим [2]:

$$\sigma_\rho = A + \frac{B}{\rho^3} - \frac{\lambda}{\rho}, \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{2\rho^3} - \frac{\lambda}{2\rho}, \quad \lambda = \frac{abE\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b-a)},$$

деформации

$$\begin{aligned} E\varepsilon_\rho &= (1-2\nu)A + \frac{(1+\nu)B}{\rho^3} + E\alpha\left(T_b - \frac{a\Delta T}{b-a}\right), \\ E\varepsilon_\theta &= (1-2\nu)A - \frac{(1+\nu)B}{2\rho^3} + E\alpha\left(T_b + \frac{a\Delta T}{b-a}\left(\frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)\rho} - 1\right)\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

Из (4) и (12) следует, что радиальное перемещение:

$$Eu = (1-2\nu)A\rho - \frac{(1+\nu)B}{2\rho^2} + E\alpha\left(T_b + \frac{a\Delta T}{b-a}\left(\frac{(1+\nu)b}{2(1-\nu)} - \rho\right)\right)$$

5. Граничные условия

Величины A, B определяются из граничных условий. Если шар находится в упругом состоянии и заданы условия $\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a$, $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$, то:

$$A = -p_b + \frac{a^3\Delta p - \lambda(b^2 - a^2)}{b^3 - a^3}, \; B = -\frac{a^3b^3\Delta p + \lambda a^2b^2(b-a)}{b^3 - a^3}, \; \Delta p = p_a - p_b$$

Если на одной границе задано условие в напряжениях $u|_{\rho=a} = u_a$, а на другой в перемещениях $u|_{\rho=b} = u_b$, то:

$$A = \frac{aE\alpha\Delta T}{(1-2\nu)(b-a)} - \frac{(1-2\nu)(b^2-a^2)\lambda}{2(1-2\nu)(b^3-a^3)} - \frac{E\alpha T_b}{1-2\nu} + \frac{Eu_b b^2 - Eu_a a^2}{2(1-2\nu)(b^3-a^3)},$$

$$B = \frac{a^2b^2\lambda}{b^2+ab+a^2} + \frac{2a^2b^2(Eu_b a - Eu_a b)}{(1+\nu)(b^3-a^3)}$$

Если на одной границе задано условие в напряжениях $\sigma_\rho|_{\rho=a} = -p_a$, а на другой в перемещениях $u|_{\rho=b} = u_b$, то:

$$A = \frac{2b^2Eu_b - (1+\nu)a^3p_a}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} + \frac{((1-3\nu)b^2 + (1+\nu)a^2)\lambda}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} - \frac{2b^3E\alpha T_b}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3}$$

$$B = -\frac{2a^3b^2(Eu_b + (1-2\nu)bp_a)}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} + \frac{a^2b^2(2(1-2\nu)b - (1-3\nu)a)\lambda}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} +$$

$$\frac{2a^3b^3E\alpha T_b}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3}$$

Кинематическое условие $u|_{\rho=b} = u_b$ эквивалентно условию $\sigma_\rho|_{\rho=b} = -p_b$, когда давление p_b вычисляется по формуле:

$$p_b = \frac{3(1-\nu)a^3bp_a - 2Eu_b(b^3 - a^3)}{(1+\nu)ba^3 + 2(1-2\nu)b^4} - \frac{((1+3\nu)a^3 - 4\nu b^3)T_b}{(1+\nu)a^3 + 2(1-2\nu)b^3} -$$

$$\frac{((1-3\nu)(b^3 - a^3) + 3(1-\nu)a^2b)\lambda}{(1+\nu)ba^3 + 2(1-2\nu)b^4}$$

Данная формула полезна тогда, когда нужно знать какое давление p_b обеспечивает нужное значение перемещений на границе $\rho = b$.

Если в упругом состоянии находится часть шара, то алгоритм вычисления величин A , B , которые обычно называются константами интегрирования, зависит от того, где расположены упругая и пластическая области.

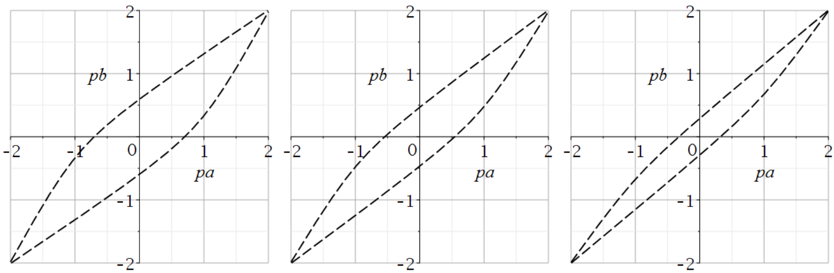
6. Эквивалентное напряжение

Термин эквивалентная величина используется для оценки каких-либо структур, полей величин и т. д. Эквивалентное напряжение – это выпуклые изотропные скалярные функции. Приравнивая эквивалентное напряжение функции пластичности можно построить образ кривой пластичности в подпространстве внешних параметров.

Когда шар испытывает только силовое внешне воздействие эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = \frac{\varsigma(\sigma_\rho^w + 2\sigma_\theta^w)^{\frac{1}{w}} + \eta|\sigma_\rho - \sigma_\theta|}{\varsigma + \eta}$$

в упругой области будет убывающей функцией радиальной координаты. Пластическая область будет зарождаться на внутренней границе шара. На рис. 2 показан образ кривой пластичности на плоскости p_a , p_b для разных значений внутреннего радиуса шара.



а б в

а) $a = 0.1$, *б)* $a = 0.6$, *в)* $a = 0.8$

Рис. 2. Образ кривой пластичности, когда

$b = 1$, $k = 1$, $\varsigma = 0.2$, $w = 2$, $\eta = 0.5$

Когда значения параметров p_a , p_b определяют точку расположенную внутри кривой, изображенной на рис. 2, весь шар будет находиться в упругом состоянии. Для значений параметров p_a , p_b определяющих точку на кривой граница шара $\rho = a$ переходит в пластическое состояние.

7. Пластическая область

Если функция пластичности относительно напряжений σ_ρ , σ_θ линейная, то в пластической области задача определения напряжений имеет аналитическое решение [4, 6].

Для нелинейных функций пластичности задача определения напряжений решается численно. В этом случае дифференцируя функцию пластичности по радиальной координате, учитывая уравнение равновесия, получаем систему двух дифференциальных уравнений для определения напряжений:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0, \\ \dfrac{d\sigma_\theta}{d\rho} - 2\dfrac{\partial f/\partial\sigma_\rho}{\partial f/\partial\sigma_\theta}\dfrac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} - \dfrac{\partial k/\partial r}{\partial f/\partial\sigma_\theta} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

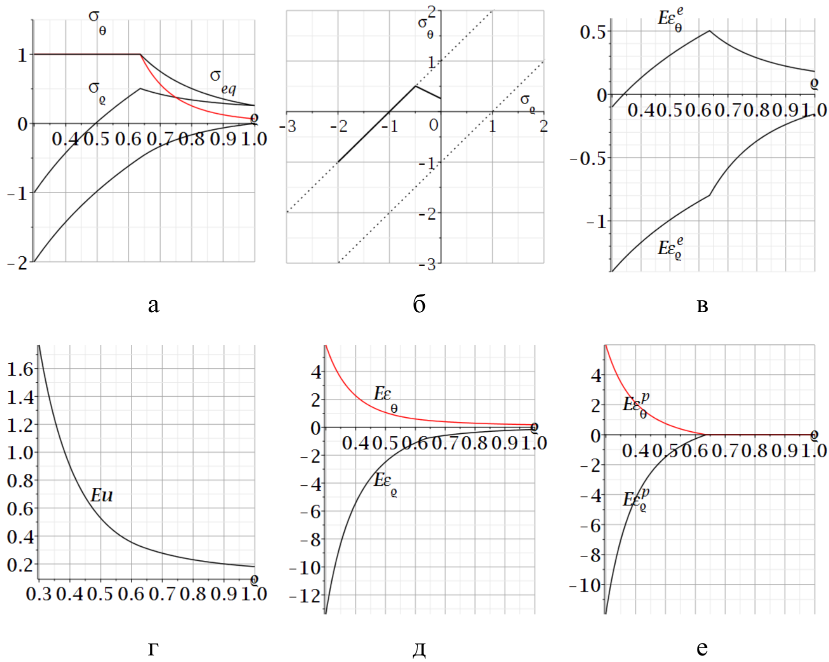
Уравнение для определения перемещений в пластической области получаем из системы (2)-(4), (7):

$$\frac{dEu}{d\rho}-\sigma_\rho+2\nu\sigma_\theta-\frac{\partial f/\partial\sigma_\rho}{\partial f/\partial\sigma_\theta}\left(\frac{Eu}{\rho}-(1-\nu)\sigma_\theta+\nu\sigma_\rho\right)=0$$

Если функция пластичности является кусочно-линейной, то вместо второго уравнения в системе (13) можно непосредственно используем функцию пластичности для каждого режима отдельно.

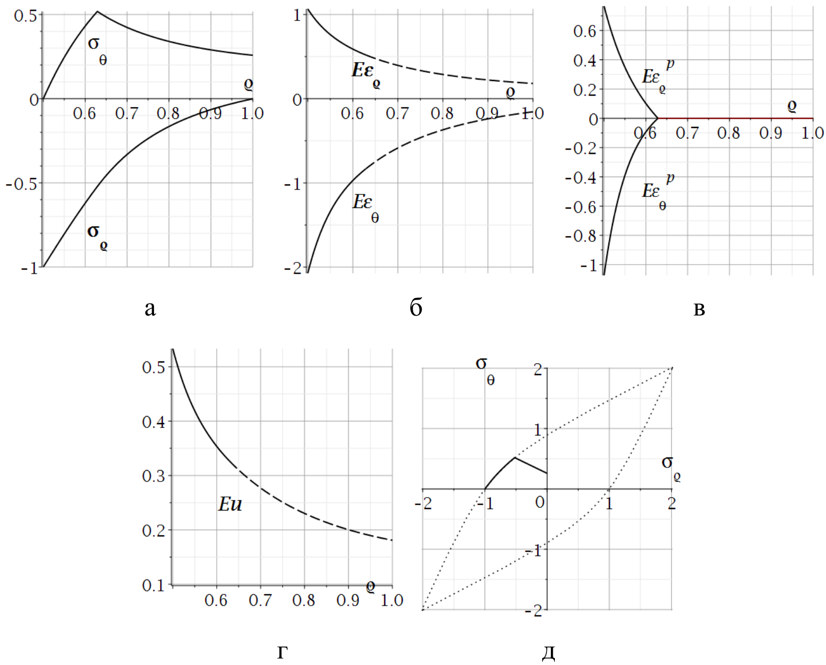
8. Результаты вычислений

На рис. 3-4 приведены графики для напряжений, деформаций, перемещений и годографа вектора напряжений, когда параметры $a=0.5$, $b=1$, $k_0=1$, $\nu=0.3$, $w=2$, $\eta=0.5$, $\varsigma=0.2$, $p_a=0.5$, $\chi=0$.



а) напряжения, б) годограф ветора напряжений, в) упругие деформации г) перемещение, д) полные деформации, е) пластические деформации

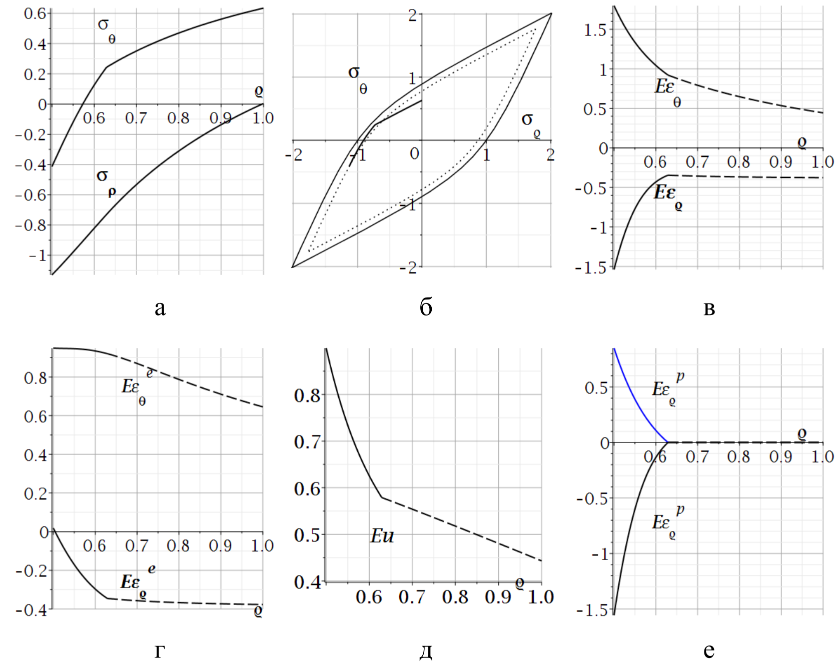
Рис. 3. Параметр $p_b=0$, радиус упругопластической границы $c=0.629$



а) напряжения, б) полные деформации (сплошная линия – пластическая область, пунктирная – упругая), в) пластические деформации, г) перемещение, д) годограф вектора напряжений

Рис. 4. Параметр $p_b = 0$. Радиус упругопластической границы $c = 0.629$

На рис. 5 приведены графики для напряжений, деформаций, перемещений и годографа вектора напряжений, когда зависимости предела пластичности от температуры $k = k_0(1 - \psi T)$, а параметры $a = 0.5$, $b = 1$, $k_0 = 1$, $\nu = 0.3$, $\varsigma = 0.2$, $w = 2$, $\eta = 0.5$, $p_a = 1.13$, $p_b = 0$, $\chi = 0.0017$.



а) напряжения, б) годограф вектора напряжений, в) полные деформаци, г) упругие деформации, д) перемещения, е) пластические деформации (сплошная линия – пластическая область, пунктирная – упругая)

Рис. 5. Радиус упругопластической границы $c = 0.629$

Выводы

Предложенная процедура определения напряженного и деформируемого состояния в пластической области шара справедлива для любого условия пластичности. Учет упругой, пластической сжимаемости и зависимость предела пластичности от температуры существенно влияет на распределение напряжений и деформаций в толстостенной сферической оболочке.

Литература

1. Timoshenko S. P. Theory of elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 506 p.

2. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.

3. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.
4. Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity / L. M. Kachanov. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1971. – 482 p.
5. Lubliner J. Plasticity Theory / J. Lubliner. – New York : MacMillan Publishing Company, 1990. – 516 p.
6. Chakrabarty J. Theory of Plasticity / J. Chakrabarty. – Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.
7. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – Москва: Физматлит, 1963. – С. 252.
8. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field / U. Gamer // Journal of Thermal Stresses. – 1988. – Vol. 13. – P. 159–173.
9. Бабешко, М. Е. Термоупругопластическое деформирование составной оболочки в процессах осесимметричного нагружения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений / М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46. – С. 34–41.
10. Дац Е.П. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара / Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин //Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 5. – С. 30–36.
11. Burenin A. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process / A. Burenin, E. Murashkin, E. Dats // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 1959, – P. 070008. – URL: https://doi.org/10.1063/1.5034683
12. Сёмка Э.В. Упругопластическое состояние полого шара / Э. В. Сёмка // Вестник инженерной школы ДВФУ. Серия: Механика деформируемого тела. – 2020. – № 3(44).
13. Aleksandrova N. N., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Shashkin A. I. On stress/strain state in a rotating disk // AMCSM_2018 IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 (2019) 8p. 012001 doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012001
14. Aleksandrova N. N. On stress/strain state in a rotating disk / N.N. Aleksandrova, M.A. Artemov, E.S. Baranovskii, A.I. Shashkin // AMCSM_2018 IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2019, Vol. 1203, Article ID 012001 URL: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001
15. Semka E. V. Mathematical modeling of rotating disk states / E V Semka, M A Artemov, Y N Babkina, E S Baranovskii and A I Shashkin // Published under licence by IOP Publishing Ltd Journal of Physics: Conference Series, Applied Mathematics, Computational Science and

Mechanics: Current Problems 11-13 November 2019. –Voronezh, Russian Federation – 2020. –V. 1479. – DOI:10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

16. Ишлинский А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. – 704 с. – ISBN 5-9221-0141-2.